Non-Equilibrium Local States in Relativistic Quantum Field Theory *

小嶋　泉
京都大学数理解析研究所

1　基本的な考え方

「非平衡」とは，自然がもっとも活き活きした姿を如実に顕す領域・現象に違いない。しかるに，現象論的あるいは熱力学的枠組での非常に興味深い諸理論の展開を別にすれば，ミクロ量子論から出発してそれを「第一原理的に」論じようとの試みは，(少数の例外を除き）従来あまり体系的になされて来なかったのではないか？それは，熱平衡領域での統計力学が，Gibbs ensemble あるいはそれを無限系へ拡張した久保・Martin-Schwinger (KMS) 条件による簡潔かつ普遍的な熱平衡状態の特徴づけに基づいて，具体的モデルの詳細な議論から無限系の精緻な数理物理学的取扱いに至るまで，縦横に展開されてきたのと著しい対照をなす。

理由は明白である :「非平衡」状態＝平衡「でない」状態，という「消去法」的発想の貧困さ・曖昧さに幻惑され，その簡潔かつ普遍的な特徴づけの可能性が真剣に吟味されて来なかったことが第一。加えて非平衡領域の豊かな多様性を眼前にするとき，マクロ階層での個別的特徴の重要性を強調することが，普遍的量子的ミクロとのつながりを軽視する偏見を生み，ミクロ量子論からの「第一原理的」議論への悲観論をもたらしたからではないか？しかし，平衡系の統計力学・物性論の巨大な達成＝「多様性」解明の基礎が，ミクロ量子論＝「普遍性」との深いつながりに由来していたことを，今改めて振り返る必要はないだろうか？

ユークリッド幾何から「非」ユークリッド幾何へ，可換な古典世界から「非」可換な量子世界へ，standard logic から *non*-standard logic へ，等々,「非ァ廚悗 transition が積極的な新しい内容を産み出した例は歴史に数多い。以下では特に，非ユークリッド幾何への移行＝多様体論の理解において基本的なものの見方をお手本に，ミクロ量子論＝（相対論的）量子場理論から出発し，非平衡局所状態を簡潔に特徴づけると共に，その熱力学的記述を可能にするような一つの枠組の定式化を試みる。ここでは概念的側面に重点をおき，技術的詳細は [1, 2] を参照して頂くことにしたい。

非ユークリッド幾何＝「曲がった空間」，例えば地球表面の幾何を，曖昧にではなく正確に捉えようとすれば,「曲がったものを曲がったものとしてそのままに $\cdots$」というわけには行かない。「曲がり」が無視できる狭い地表面なら 2 次元平面＝ユークリッド空間に正確な地図が書けるが，地表面全体を 1 枚の地図で正確に記述するのは不可能なように，局所地図 local charts を何枚も作り，その全体＝地図帳 atlas から正確な幾何学的記述が

*筑波大学非平衡物理シンポジウム (2002.1) 報告原稿

引き出される。多様体論の教科書の最初に出てくる（はずの）このお馴染みの議論が教えるのは，

i) 「曲がった空間」＝［我々が正確な記述を目指す**「未知」の対象**］

を捉えるには，それを，

ii) 「真っ直ぐなもの」＝［**「記述」に役立つ既知の基準系**］

に関係づけることが不可欠で，そのためには，

iii) 未知の対象を既知の「物指しで**測る作業**」，

そして，

iv) 得られたデータを**「つなぎ合わせる」作業＝記述・解釈**

が，最低限必要だということである。非平衡局所状態の定式化に関する我々の今の文脈で，これに対応するのは，

i') ［未知の対象］:［記述しようとする非平衡状態］＝［非平衡局所状態として特徴づけられるはずの状態］，

ii') ［既知の基準系］: 大域的熱平衡状態の全体から成る「熱的基準状態の族」(*family of thermal reference states*),

iii') ［物指しで測る作業］: 対象とする未知の状態 i') において，局所熱的観測量 (*local thermal observables*)［＝各時空点での熱的性質を検知する量子論的物理量］を測定し，その測定値を ii') で得られるデータ表と比べること，

iv') ［データをつなぎ合わせる作業］:［局所熱的状態の判定基準・特徴づけ］＝［「階層化された局所的熱力学第 0 法則」の成立不成立］を iii') に基づいて判定し，それが満される場合に得られる熱力学量に基づく状態の熱力学的記述・解釈，

ということになる。以下の各節で，上の ii')-iv') の概略を説明しよう。

2 熱的基準状態

大域的熱平衡としての相対論的 **KMS 状態**: KMS 条件とは，Gibbs ensemble に特徴的な関係，$Tr(e^{-\beta H}AB(t)) = Tr(e^{-\beta H}Ae^{\iota Ht}Be^{-\iota Ht}) = Tr(e^{-\beta H}B(t-i\beta)A)$，を無限系にも適用可能な形に定式化し直したもので，熱平衡状態の一般的特徴づけを与え [3, 4]，相対論的文脈では次のようになる [5]。物理量の代数 $\mathcal{A}$ 上の《期待値汎関数》として一般的に定義された状態 ω_β が逆温度 4-vector $\beta = (\beta^\mu)(\in V_+ := \{x \in R^4; x^2 \equiv (x^0)^2 - (\vec{x})^2 > 0, x^0 > 0\})$ を持つ相対論的 KMS 状態であるとは，次の相対論的 KMS 条件を満たすこと：任意の物理量の組 $\hat{A}, \hat{A}' \in \mathcal{A}$ に対し，$D_\beta := \mathbb{R}^4 + i\,(V_+ \cap (\beta - V_+))$ で解析的，D_β の閉包 $\overline{D_\beta}$ 上で連続な関数 $h = h_{\hat{A},\hat{A}'}$ が存在して，境界条件

$$h(a) = \omega_\beta(\hat{A}'\alpha_a(\hat{A})), \quad h(a+i\beta) = \omega_\beta(\alpha_a(\hat{A})\hat{A}')$$

を満たす。ただし α_a は任意の時空並進。このとき ω_β は，timelike unit vector $e = \beta/\sqrt{\beta^2} \in V_+$ で定まる静止系で温度 $T = 1/k_B\sqrt{\beta^2}$ の大域的熱平衡を記述する。

時空並進と Lorentz 変換を合成した Poincaré 変換 $\lambda = (\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \rtimes L_+^\uparrow$ によって，状態 $\omega_\beta \in \mathcal{C}_\beta$ は逆温度 $\Lambda\beta$ の状態 $\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1} \in \mathcal{C}_{\Lambda\beta}$ に移ることが，KMS 条件からすぐに出る。これによって温度は不変 $1/\sqrt{\beta^2} = 1/\sqrt{(\Lambda\beta)^2}$ だが，状態 ω_β は reference frame $e = \beta^\mu/\sqrt{\beta^2}$ の変化のために別の状態に移ってしまう： $\omega_\beta \neq \omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1}$。即ち，熱的効果で Lorentz 不変性が自発的に破れる（[6]）。

このような相対論的 KMS 状態（以下，略して KMS 状態） ω_β の全体 $\mathcal{C}_\beta$ は，一意的な端点分解が可能な凸集合（単体）であることが知られている [4]。「端点」とは，もはやこれ以上凸分解できない「端」で，物理的には熱力学的純粋相に対応し，$\mathcal{C}_\beta$ の各点はマクロの古典的物理量 (e.g., 化学ポテンシャル等) で識別される。以下では簡単のため，各温度毎に KMS 状態は 1 個，つまり，相転移はないと仮定して議論しよう。この仮定の下では，ω_β の変換性は単純に $\omega_\beta \circ \alpha_\lambda^{-1} = \omega_{\Lambda\beta}$ に帰着し，時空並進で不変，静止系で等方的な状態になる。

ii') の「熱的基準状態の族」として，この大域的熱平衡状態 ω_β から次のように構成した状態の集まりを採ることにする：KMS 状態 ω_β の逆温度 4-vector は定義からきっちり β に定まっているが，非平衡な一般的状況では，時空の各点で温度が正確には決まらなかったり，統計的にゆらいだりする可能性を許容する必要がある。そうした状況は，異なる温度にわたる KMS 状態の統計的混合として，$\omega_B = \int_B d\rho(\beta)\,\omega_\beta$ の形に表わせる。ただし，$d\rho(\beta)$ は逆温度 4-vector $\beta \in V_+$ の集合上の確率測度で，(compact) 集合 $B(\subset V_+)$ はそのゆらぎの範囲を与える： $\mathrm{supp}(\rho) \subset B \subset V_+$。こういう状態 ω_B の集まりを

$$\mathcal{C}_B := \{\omega_B = \int d\rho(\beta)\,\omega_\beta; \rho\text{: 確率測度 with } \mathrm{supp}(\rho) \subset B\}, \tag{1}$$

と書き，i') の未知の状態 ω の局所熱的性質の記述における参照基準系 [ii')] となる熱的基準状態の全体として，集合 $\mathcal{C} := \bigcup_{B:\,\mathrm{cpt}\,\subset V_+} \mathcal{C}_B$ をとることにしよう。

3　局所熱的観測量による“座標付け”

次に必要になるのは，i') と ii') を結びつける“座標付け” iii') のための道具である。基本的な考え方は，着目する未知の状態 ω において熱的観測量の集まり $\{\Phi_i\}$ を測り，得られた測定データ $\omega(\Phi_i) = \Phi_i(\omega)$ を対象 ω の“Φ_i-座標”と見て“$\{\Phi_i\}$-空間”にプロットする。既知の平衡状態 $\omega_\beta \in \mathcal{C}_\beta$ での値 $\Phi_i(\omega_\beta)$ を検索して，首尾よく等号 $\Phi_i(\omega) = \Phi_i(\omega_\beta)$ が成り立つようなデータセットが見つかれば，観測量 $\{\Phi_i\}$ で記述される性質に関する限り，未知の ω をその既知の状態 $\omega_\beta \in \mathcal{C}$ と同一視できる，ということである： i.e., $\omega \equiv \omega_\beta$ (mod $\{\Phi_i\}$)。(前節末で KMS 状態の統計的混合 $\omega_B = \int_B d\rho(\beta)\,\omega_\beta$ を導入したのは，温度ゆらぎも取り込めるよう「基準データ検索」の範囲を広げたということ。)

そこで，非平衡状態の局所熱的性質を記述する上のような目的に相応しい熱的観測量を，出発点のミクロ量子論＝相対論的量子場理論の枠組の中からうまく選び出すことができるか？という問いに答えるのが，この節の目標である。もっとも望ましいのは，十分小さな有限の広がりを持つ時空領域 $\mathcal{O}$ の中で測れる物理量を用いて，未知状態の $\mathcal{O}$ 内での熱的性質を記述する可能性だろう。しかし多様体の話と違って，この場合，有限の時空的広がりでの記述を，最初から実現するのは殆ど不可能である。そこで，まず時空の 1 点 x について考え，しかる後有限領域へ広げるという方法をとる。するとたちまち出会

うのは，紫外発散のため１点での量子場は無意味，という周知の困難である：あちら立てればこちら立たず！恐らくこうした事情が，ミクロ量子論から出発して非平衡の一般的枠組を，という課題を長らく棚晒しにした理由に違いない。

しかしここで諦めて撤退するのは早い！「１点での量子場 $\hat{\phi}(x)$」なるものに意味を持たせる「抜け道」が，実はあるのだ：$\hat{\phi}(x)$ を「無意味」にする元凶は「紫外発散」，即ち，場の高振動成分であり，それが効かない状況なら無限大が剥き出しになるわけではない。高エネルギー成分が効かない状態をとればよいのである。実際次のようにして，この考え方を数学的に意味のある形に定式化することができる。まず，量子場の紫外発散は，構成的場の理論で扱われた多くの model でその成立が確認された「エネルギー上限」と呼ばれる次の不等式 [7] の形で理解される：勝手な $l > 0$ を与え十分大きな $m > 0$ と適当な定数 $c > 0$ をとると，任意の test function $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ に対して

$$||(\mathbf{1}+H)^{-m}\,\hat{\phi}(f)\,(\mathbf{1}+H)^{-m}|| \leq c\int dx\,|(\mathbf{1}-\Delta)^{-l}f(x)|. \tag{2}$$

ただし，H は真空表現での Hamiltonian，$||\cdot||$ はその状態空間での作用素ノルム，Δ は $\mathbb{R}^4$ 上の Laplacian。そこで，１点 x 上の Dirac 測度 δ_x に収束する test function の列 δ_i, $\delta_i \underset{i\to\infty}{\to} \delta_x$, をとれば，十分大きな $m > 0$ に対して

$$\lim_{i\to\infty}(\mathbf{1}+H)^{-m}\,\hat{\phi}(\delta_i)\,(\mathbf{1}+H)^{-m} =: (\mathbf{1}+H)^{-m}\,\hat{\phi}(x)\,(\mathbf{1}+H)^{-m} \tag{3}$$

により $\hat{\phi}(x)$ を数学的に意味づけでき，条件 $\omega((\mathbf{1}+H)^{2m}) < \infty$ を満たす状態 ω に対しては $\omega(\hat{\phi}(x))$ がちゃんと意味を持つ。正確には，ここに現れる真空表現の Hamiltonian H は，熱的状態を扱う今の文脈にそぐわないのだが，有界時空領域 $\mathcal{O}$ 内で表現に依らず Hamiltonian の役割をする演算子 $H_{\mathcal{O}}$ が存在するので，それに置き換えればよい。局所熱的な解釈を許す状態 ω は局所的に有限なエネルギーを持つから，条件 $\omega((\mathbf{1}+H_{\mathcal{O}})^{2n}) < \infty$ は常に満たされる。

この手続きによって，量子場が元々持っていた積演算の構造は失われるが，数学的に厳密な形で再定式化された演算子積展開 (OPE) [8] を使うと，それも実質的に回復できる：$\hat{\phi}(x+\zeta)\hat{\phi}(x-\zeta)$ を $\zeta = 0$ の周りに展開したときに現れる「正規積」$\mathcal{N}(\hat{\phi}^2)_{q,x}$ によって $\hat{\phi}(x)^2$ やその高次べき $\hat{\phi}(x)^p$ に対応する量を定義し，また $\partial_\zeta\,\hat{\phi}(x+\zeta)\hat{\phi}(x-\zeta)$ の展開より「相対座標」ζ に関する導関数を意味づけることも可能［下添字 q は $\zeta \to 0$ での収束性 $O(|\zeta|^q)$］。この “balanced derivative” は,「同時空点での積」で与えられた composite operator の内部構造を記述する。これらの測定値が分かれば，それから x 近傍での p 点相関函数を決めることが可能となるのである。

他方,「重心座標」についての微分 ∂_x は，未知状態 ω の時空的不均一性を鋭敏に検知するが，それに対して，$\omega(\partial_x(\cdots))$ を比較する相手の基準状態の方は時空並進不変性より常に $\omega_\beta(\partial_x(\cdots)) = 0$。ここで我々が考えている iii') の比較の目的は，状態 ω の時空的性質ではなく，その熱的性質を知ることだから，単にこの不整合は，ここでの局所熱的性質の検知・記述の目的に ∂_x を含む物理量は不適当で，局所熱的観測量として採用すべきでない，ということを意味する。

そこで，目的とする iii') “座標付け” に必要な局所熱的観測量としては，上で定義された１点での場の量 $\hat{\phi}(x)$ とその高次べきに対応する正規積 $\mathcal{N}(\hat{\phi}^2)_{q,x}$，並びに，それらの “balanced derivatives” から成る物理量全てを合わせ，それらが張る線型空間 $\mathcal{T}_x$ の元を採用する：

$$\mathcal{T}_x := \sum_{p,q}\mathcal{N}(\hat{\phi}_0^p)_{q,x}\,. \tag{4}$$

この局所熱的観測量の空間 $\mathcal{T}_x$ について注目すべき点は，その定義に使われたエネルギー上限と OPE に関係した index m, p, q があり，それらの増大と共にスカラー倍から始まって，基本場，その高次べき等々が，順次出現する階層的入れ子構造があることである（詳細は略）: 高いべき p の正規積が定める p-点函数は $p \geq q$ なる q-点函数を決めるから，p が大きいほど精密な情報が得られる。したがって，熱的状態の**巨視的**性質は，通常の議論なら，小さい p,q に対応した $\mathcal{T}_x$ の部分空間 $\mathcal{N}(\hat{\phi}_0^p)_{q,x}$ で足りるはず。

—局所熱的観測量の巨視的解釈—

局所熱的観測量 $\mathcal{T}_x$ が用意できたので，基準系 $\mathcal{C}$ の状態の巨視的熱的性質についてそれらがどんな情報をもたらすかをまず見ておこう。

巨視的物理量としての熱函数と熱力学的解釈: 各温度で熱平衡状態はただ一つとの仮定から，$\mathcal{C}$ の状態に属する熱的示強変数は全て温度の函数 $\beta \mapsto F(\beta)$ として表わせるので，それを「**熱函数**」と呼ぼう (これは熱力学における内部エネルギー密度や，エントロピー密度等の熱力学的示強変数が,「熱力学的函数（or 状態函数）」として，その温度依存性によって系の熱力学的構造を表わすのと同じ；一意性の仮定が破れても，圧力・化学ポテンシャル等，純粋相を区別するのに必要なだけの秩序変数を熱函数の引数として，単に温度に付加すればよいだけのこと)。これは，各量子論的物理量 $\hat{A}$ ($\in \mathcal{A}$ or $\mathcal{T}_x$) に対し，

$$G : \hat{A} \longmapsto G(\hat{A}) \in C(V_+) \quad \text{with } G(\hat{A})(\beta) := \omega_\beta(\hat{A}) \tag{5}$$

の関係により，巨視的物理量 $G(\hat{A})$ を対応させることである。関係 $\omega_\beta \circ \alpha_{(\Lambda,a)}^{-1} = \omega_{\Lambda\beta}$ より平衡状態は並進不変で，$\hat{\Phi}(x) \in \mathcal{T}_x$ に対する熱函数 $G(\hat{\Phi}(x))$ は x に依らず（$\hat{\Phi}$ の Lorentz 変換性で決まる）β^μ だけの Lorentz tensor となる。各局所熱的観測量 $\hat{\Phi}(x)$ の熱力学的解釈は，この熱函数 $\beta \longmapsto \Phi(\beta) = G(\hat{\Phi}(x))(\beta) = \omega_\beta(\hat{\Phi}(x))$ で与えられる。その現実的意味は，各熱平衡状態 ω_β での $\hat{\Phi}(x)$ の測定値を記録し，次節で未知の非平衡局所状態 ω を熱力学的に解釈するときに参照基準となるデータ一覧を用意することである。

G は規格化された (完全) 正値線型写像, $G(\mathbf{1}) = 1, G(\hat{A}^*\hat{A}) \geq 0$, ゆえ，その双対写像 G^* は，温度ゆらぎの古典確率 $d\rho(\beta)$ ($\beta \in V_+$) を熱的基準状態 $\mathcal{C}$ に属する量子状態 $G^*(\rho)$ へと変換する ***classical-quantum*** *(c→q) channel* $G^* : M_1(V_+) \ni \rho \longmapsto G^*(\rho) \in \mathcal{C}$ である [2]：

$$G^*(\rho)(\hat{A}) = \rho(G(\hat{A})) = \int d\rho(\beta) G(\hat{A})(\beta) = \int d\rho(\beta)\omega_\beta(\hat{A}),$$
$$\Longrightarrow \quad G^*(\rho) = \int d\rho(\beta)\omega_\beta = \omega_B \in \mathcal{C}. \tag{6}$$

ただし，$M_1(V_+)$ は逆温度 4-vector $\beta \in V_+$ に関する確率測度の全体。この熱的基準量子状態 $G^*(\rho)$ において局所熱的観測量 $\hat{\Phi}(x) \in \mathcal{T}_x$ を測定すれば,

$$G^*(\rho)(\hat{\Phi}(x)) = \int d\rho(\beta)\, \omega_\beta(\hat{\Phi}(x)) = \int d\rho(\beta)\, \Phi(\beta) = \rho(\Phi). \tag{7}$$

即ち，量子的観測量 $\hat{\Phi}(x)$ と量子的状態 $G^*(\rho)$ の熱力学的解釈が，右辺の巨視的熱函数 $\Phi = G(\hat{\Phi}(x))$ と温度ゆらぎの古典確率 ρ で与えられる。これは先に ρ を知っている場合で，現実に欲しいのは，与えられた測定値のデータ表 $\Phi \longmapsto \rho(\Phi)$ から未知の ρ を決める話だが，$\mathcal{T}_x$ が十分な局所熱的観測量を含めば対応する熱函数の全体 $G(\mathcal{T}_x)$ で $\beta \in V_+$ の任意の（連続）函数を近似でき，ρ を「モーメント問題」の解として一意に定めることができる。こうして次の結論を得る:

★ 量子論的な局所熱的観測量の集まり $\mathcal{T}_x$ が $\mathcal{C}$ に属する熱的基準状態を区別するだけ十分に用意できれば，任意の基準状態 $\omega_B \in \mathcal{C}$ に対し，その温度ゆらぎを記述する確率測度 $d\rho(\beta)$ が一意に定まって，状態は $\omega_B = G^*(\rho)$ と書ける。そして，量子論的観測量 $\hat{\Phi}(x) \in \mathcal{T}_x$ は，対応する古典的巨視的物理量 $\Phi = G(\hat{\Phi}(x))$ ［例えば，内部エネルギー密度，エントロピー密度等］と同一の情報を $\mathcal{C}$ に属する基準状態の熱的性質について与える：$\omega_B(\hat{\Phi}(x)) = \rho(\Phi)$。

この時，(compact) 集合 $B \subset V_+$ 上の任意の連続関数 F は，直接 $F = G(\hat{\Phi}(x))$ となる量子論的対応物 $\hat{\Phi}(x)$ がなくとも，この形の熱函数により任意の精度で近似することができる。それが特に重要になるのはエントロピー密度 $s_\mu(\beta)$ の場合で，定義から $\omega_\beta(\hat{s}_\mu(x)) = s_\mu(\beta)$ を満たす量子論的観測量 $\hat{s}_\mu(x) \in \mathcal{T}_x$ がないのは明らかだが，上の意味で $s_\mu(\beta)$ も熱函数と見做せるのである。(★) は，$c \rightarrow q$ channel G^* の逆が $\mathcal{C}$ 上で取れること，$\mathcal{C} \ni \omega_B = G^*(\rho) \longleftrightarrow (G^*)^{-1}(\omega_B) = \rho \in M_1(V_+)$，を意味し，**基準量子状態の熱力学的解釈とはこの $q \rightarrow c$ channel $(G^*)^{-1}$ そのもの**である [2]。では，$\mathcal{C}$ に入らない非平衡状態に熱力学的解釈を与えるにはどうすればよいか？それが次節の課題である。

4 《階層化された局所的第0法則》による非平衡局所状態の特徴づけとその熱力学的解釈

階層化された局所的熱力学第0法則 [2]：未知の状態 ω を非平衡局所状態として特徴づけ，その熱力学的解釈を確立するという2つの課題に答えるため，1点 x での局所熱的観測量 $\mathcal{T}_x$ とその熱的解釈を与える熱函数 $G(\mathcal{T}_x)$ を用いて，ω を熱的基準状態 $\in \mathcal{C} = G^*(M_1(V_+))$ と比較しよう。前節の［$q \rightarrow c$ channel $(G^*)^{-1}$ ＝量子状態の熱力学的解釈］を踏まえ $\mathcal{T}_x$ の階層的入れ子構造を考慮して，「非平衡」で $\mathcal{C}$ に入らない状態を取り込むため，ω と或る基準状態 $\exists \omega_B := G^*(\rho_x) \in \mathcal{C}$ と の一致を，$\mathcal{T}_x$ 全体ではなくその適当な部分空間 $\mathcal{S}_x$ にまで緩めてやれば，

$$\omega(\hat{\Phi}(x)) = \omega_B(\hat{\Phi}(x)) = G^*(\rho_x)(\hat{\Phi}(x)) \quad \text{for } \forall \hat{\Phi}(x) \in \mathcal{S}_x. \tag{8}$$

即ち，未知状態 ω が $\mathcal{S}_x$ 内の物理量 $\hat{\Phi}(x) \in \mathcal{S}_x$ については基準状態 ω_B と同じに見える，という条件になる。これを $\omega \equiv G^*(\rho_x) \pmod{\mathcal{S}_x}$ と略記し，そういう ω を $\mathcal{S}_x$-*thermal* な状態と呼ぶ。熱函数 $\Phi := G(\hat{\Phi}(x)) \in G(\mathcal{S}_x)$ で書き直せば，

$$\omega(\Phi)(x) := \omega(\hat{\Phi}(x)) = \rho_x(\Phi), \quad \Phi \in G(\mathcal{S}_x) \tag{9}$$

となり，$\omega : \mathcal{S}_x$-*thermal* なら，“$(G^*)^{-1}$”$(\omega) := \omega(\Phi)(x) \equiv \rho_x \pmod{G(\mathcal{S}_x)}$ という形で $\omega \equiv G^*(\rho_x) \pmod{\mathcal{S}_x}$ が ρ_x について「解け」，それが ω の**局所熱的解釈**を与えることになる [2]。その物理的意味は，点 x［局所的］で部分的な熱的観測量 $\mathcal{S}_x$ に限定［階層化］すれば状態 ω が熱平衡的に見える，ということ。こうした条件的平衡接触を2物体間で考えれば，その同値関係性は，通常の熱力学第0法則を局所化・階層化したものに対応する。このように，時空点 x 毎に適当な $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{T}_x$ を選んで $\mathcal{S}_x$-thermal となる状態 ω を x での非平衡局所状態として一般的に定義することができ，それが自動的に熱力学的解釈をも保証する。

これが非平衡局所状態の本質的定義だが，逐一 $\mathcal{C}$ を持ち出さず局所熱的観測量 $\mathcal{T}_x$ だけで記述された等価な判定条件が定式化でき，実用にはそれが便利である。Compact 集合 $B \subset V_+$ 毎に

$$\tau_B(\hat{\Phi}(x)) := \sup_{\beta \in B} |\Phi(\beta)| = \left\| G(\hat{\Phi}(x)) \right\|_B \tag{10}$$

で決まる $\mathcal{T}_x$ のセミノルム τ_B の族をとると,
Criterion: $\mathcal{T}_x$ の $\mathbf{1}$ を含む部分空間 $\mathcal{S}_x$ に対して,状態 ω が $\mathcal{S}_x$-*thermal* であることは,次を満たす compact 集合 $B \subset V_+$ が存在することと同値:

$$|\omega(\hat{\Phi}(x))| \leq \tau_B(\hat{\Phi}(x)), \quad \hat{\Phi}(x) \in \mathcal{S}_x. \tag{11}$$

上の同値性の証明は [1] に委ねるが,同様の論法で,**非平衡**局所状態,即ち,局所熱的観測量 $\mathcal{T}_x$ の階層の下位にある有限次元部分空間 $\mathcal{S}_x$ については $\mathcal{S}_x$-thermal だが,そこからはみ出た物理量についてはもはや熱的基準状態との一致が成り立たなくなるような状態 ω が確かに存在することも,数学的に証明できる。

このような $\mathcal{S}_x$-thermality の概念に基づく非平衡状態 ω と基準状態=熱平衡状態との遠近という視点から $\mathcal{T}_x$ の部分空間の階層的構造を見直すと,そこでの $\mathcal{S}_x$ のサイズは $\mathcal{S}_x$-thermal state ω の熱力学的安定性として解釈することができる。その意味でこの階層は,非平衡から平衡への漸近の扱いでしばしば議論されるスケールに基づく熱的状態の階層とも,密接なつながりをもつものと思われる。

—熱的パラメータを特定する方法—

この枠組では,状態 ω において特定の熱函数 Φ が,局所的にゆらぎなしの定まった値をとるか,あるいは,統計的にゆらいでいるかの判定もできる。それには,Φ の平均と共にその分散に対応する物理量を含む局所熱的観測量の空間 $\mathcal{S}_x$ をとり,それについて ω の $\mathcal{S}_x$-thermality を調べればよい。例えば,$G(\hat{\Phi}_1(x)) =: \Phi, G(\hat{\Phi}_2(x)) = \Phi^2$ となる局所熱的観測量が共に $\mathcal{S}_x$ に含まれれば,

$$\delta\hat{\Phi}_\kappa(x) := \hat{\Phi}_2(x) - 2\kappa\,\hat{\Phi}_1(x) + \kappa^2\,\mathbf{1}, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

に対応する熱函数 $G(\delta\hat{\Phi}_\kappa(x))$ は $(\Phi - \kappa 1)^2$ で,全ての熱的基準状態 $\in \mathcal{C}$ についてこれは非負,かつ,Φ がゆらぎなしに値 κ をとるような状態でのみ 0 となる。したがって,状態 ω が $\mathcal{S}_x$-thermal でかつ 或る κ において $\omega(\delta\hat{\Phi}_\kappa(x)) = 0$ を満たすなら,この状態 ω で,Φ は点 x において正確に値 κ を持つ。

このようにして $\mathcal{S}_x$ を適切に選べば,局所的に温度の定まった状態,即ち,ある 4-vector $\beta(x) \in V_+$ により $\omega \equiv \omega_{\beta(x)} \pmod{\mathcal{S}_x}$ を成り立たせる状態を選び出すことが可能となる。このような状況を実現する最小の $\mathcal{S}_x$ は,(具体例 [1] で)一般に有限次元で十分である。もし $\omega \equiv \omega_{\beta(x)} \pmod{\mathcal{S}_x}$ がひとたび成り立てば,各 $\hat{\Phi}(x) \in \mathcal{S}_x$ に対応する熱函数 $\Phi = G(\hat{\Phi}(x))$ は全て,この状態 ω でゆらぎのない定まった値を局所的に持つことになる。こうして,通常の統計力学では外から天下りに与えた人為的 parameter でしかなかった(逆)温度 β が,ここでは現実世界でと同様,測定を通じて決定されるべき一人前の物理量となる。

もちろん $\mathcal{S}_x$ を広げて行くと,この ω があるところで熱的解釈をもはや持たなくなることも起き得る。その場合状態 ω は,精度の粗い熱的性質に限定すれば熱平衡状態 ω_β と同じ熱的性質を共有しているが,より細かい精度で見始めると,その非平衡性が熱平衡状態からのズレとして露わになるということになる。つまり,局所熱的観測量の適当な部分空間 $\mathcal{S}_x$ を選んで,それに対応する局所熱的性質を調べることは,或る「粗視化」の手法を実行することに対応している。これは,局所的に決まった熱的性質を持つ多様な状態を同定する可能性を示唆するもので,非平衡系の取扱いとして自然なアプローチを与えるものと言えよう。

—熱的性質の時空発展—

このような枠組を1点 x から (有限の広がりを持った) 時空の部分領域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ へ拡張すれば，領域 $\mathcal{O}$ 内で熱力学的解釈を持つ局所状態を扱うことが可能となる。簡単のため，各領域での熱的物理量を固定し，それらの $\mathcal{S}_x$, $x \in \mathcal{O}$ を時空並進でつないで同一視することにしよう:

$$\mathcal{S}_x := \alpha_x(\mathcal{S}_0), \quad x \in \mathcal{O}. \tag{12}$$

ただし，α_x は Poincaré 変換の一部としての時空並進。この約束のもとに，各 $x \in \mathcal{O}$ 毎に $\omega \equiv \omega_{B(x)}$ (mod $\mathcal{S}_x$) が成り立つとき，状態 ω は領域 $\mathcal{O}$ で $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-*thermal* であるということにする。このとき，熱函数 Φ の平均値の時空的振舞は，函数 $\mathcal{O} \ni x \mapsto \omega(\Phi)(x) = \omega(\hat{\Phi}(x))$ で記述される。これによってミクロの動力学 [dynamics α_x] と，巨視的熱的な性質の時空発展 [evolution $x \mapsto \omega(\Phi)(x)$] の間が自然に橋渡しされ，それによって状態の熱的動力学としての *thermo-dynamics* が実現する。

局所的に熱的解釈を持つ非平衡状態を特徴づけると共に，その熱力学的性質を記述するという2つの課題は，このようにして，階層化された局所的な熱力学第0法則に基づく非平衡局所状態の判定基準によって，同時に解決される。こうした状況で，熱平衡に近い状態 ω を考えると，熱函数が線型発展方程式を満たすことが一般的に導かれる。これは低エネルギー定理の一般化と見做すことができ，平衡状態への摂動を準粒子として扱う周知の解釈とも整合する。

以上のような一般的枠組を，簡単な例を通して具体的に説明することが望ましいが，それについては論文 [1] に譲りたい。紙数の関係上，ここでは [2] で得られた視点に基づき，もっぱら概念的側面を中心にした議論に限定せざるを得なかった。

References

[1] D. Buchholz, I. Ojima and H. Roos, Thermodynamic Properties of Non-Equilibrium States in Quantum Field Theory, Ann. Phys.(N.Y.), **297**, 219 (2002).

[2] I. Ojima, Non-Equilibrium Local States in Relativistic Quantum Field Theory, to appear in Proc. of Japan-Italy Joint Workshop on Fundamental Problems in Quantum Mechanics, September 2001, Waseda University.

[3] R. Haag, N.M. Hugenholtz and M. Winnink, Comm. Math. Phys. **5**, 215 (1967).

[4] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vol.2*, Springer, 1996.

[5] J. Bros and D. Buchholz, Nucl. Phys. **B429**, 291 (1994).

[6] I. Ojima, Lett. Math. Phys. **11**, 73 (1986).

[7] K. Fredenhagen and J. Hertel, Comm. Math. Phys. **80**, 555(1981); W. Driessler and J. Fröhlich, Ann. Inst. H. Poincaré **27**, 221 (1997).

[8] H. Bostelmann, Lokale Algebren und Operatorprodukte am Punkt, PhD Thesis, Universität Göttingen, 2000.